WS 2014/2015

Ergänzungen zur klassischen Physik: Solitonen, Monopole, Instantonen

Olaf Lechtenfeld

28.11.2014

Präsenzübung 3

P4: Die Bäcklund Transformation

Die Lagrangedichte für das sine-Gordon Modell ist

$$\mathcal{L} \;=\; \frac{1}{2}\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - (1-\cos\phi)\,, \tag{1}$$

wobei $\phi(x,t)$ eine skalare Funktion in einer Raumdimension ist. Die Bewegungsgleichung lautet

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi + \sin\phi \;=\; 0\,. \tag{2}$$

Da das sine-Gordon System integrabel ist, kann man Bäcklund Transformationen verwenden um Lösungen der Bewegungsgleichung zu finden, ohne diese selbst lösen zu müssen. Man erhält eine Lösung ψ aus einer bekannten Lösung ϕ und der Transformation

$$\partial_+\psi \;=\; \partial_+\phi - 2\,\beta\,\sin\left(\frac{\phi+\psi}{2}\right)\,, \quad \partial_-\psi \;=\; -\partial_-\phi + \frac{2}{\beta}\,\sin\left(\frac{\phi-\psi}{2}\right)\,, \tag{3}$$

mit $\partial_\pm = \frac{\partial}{\partial x_\pm}$ in Lichtkegelkoordinaten, $x_\pm = \frac{1}{2}(x \pm t)$.

a) Schreiben Sie Gleichung (2) in Lichtkegelkoordinaten.

b) Beweisen Sie, dass auch ψ die Bewegungsgleichung erfüllt.

   Hinweis: $\sin x \mp \sin y \;=\; 2\cos\left(\frac{x\pm y}{2}\right)\sin\left(\frac{x\mp y}{2}\right)$

c) Aus der trivialen Lösung $\phi = 0$ erhält man so die Lösungen $\psi_j = 4\arctan(e^{\theta_j})$, mit $\theta_j = -\beta_j x_+ - x_-/\beta_j + \alpha_j$. Setzen Sie diese Ergebnisse in

$$\psi_{12} = 4\arctan\left[\left(\frac{\beta_1+\beta_2}{\beta_2-\beta_1}\right)\tan\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)\right] - \phi \tag{4}$$

   ein. Schreiben Sie dabei zunächst den Tangens als $\frac{\sinh[f(\theta_1,\theta_2)]}{\cosh[g(\theta_1,\theta_2)]}$.

   Hinweis: $\arctan x - \arctan y \;=\; \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$, für $x - y > -1$.

d) Drücken Sie ψ_{12} nun in den Koordinaten (x,t) aus. Wählen Sie für die Transformationsparameter $\beta_1 = -1/\beta_2 = \beta$ und für die Integrationskonstanten $\alpha_{1,2} = 0$. Nutzen Sie die Relation $v = \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}$ um das Ergebnis (2.37) aus der Vorlesung zu erhalten.

e) Betrachten Sie die eben erhaltene Lösung

$$\psi(x,t) = 4\arctan\left[\frac{v\sinh(\gamma x)}{\cosh(\gamma v t)}\right] \tag{5}$$

für den Fall $|vt| \gg 1$. Wo befinden sich die Kinks in diesem Fall?

P5: Asymptotische Kraft

Für das sine-Gordon Modell lässt sich aus den statischen Lösungen eine Wechselwirkungsenergie

$$E_{\text{int}} = 32e^{-2r} \tag{6}$$

für zwei weit voneinander entfernte Kinks angeben. Dabei ist $2r$ der Abstand der beiden Kinks, die sich bei $x = r$ und $x = -r$ befinden.

a) Nehmen Sie nun an, dass Gleichung (6) für alle Zeiten gilt und leiten Sie daraus die Newtonsche Bewegungsgleichung für r ab.

   Hinweis: In unseren Einheiten hat ein Kink die Masse $m = 8$.

b) Lösen Sie die Bewegungsgleichung mit den Randbedingungen $\dot{r}(-\infty) = -v$ und $\dot{r}(0) = 0$.

   Hinweis: Nutzen Sie den Ansatz $r(t) = \ln(f(t))$, mit einer positiven Funktion f.

c) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Abstand $a(t)$, den Sie aus Gleichung (5) erhalten, wenn Sie $\tan\frac{\psi}{4}$ als Funktion von $(x - a(t))$ und $(x + a(t))$ schreiben. Warum stimmen die Ergebnisse nur für kleine Geschwindigkeiten überein?